

Министерство образования Российской Федерации  
Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
“Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова”

**Научно-исследовательская работа  
на конкурс научных работ молодых исследователей  
“Молодежь в научном сообществе”**

Тема:

**“ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ  
МОДЕЛЕЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ  
РАДИО- И ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА”**

Исполнитель: кандидат технических наук Медведев В.Г.

Научные руководители: доктор технических наук,  
профессор Пряников В.С.;  
доктор физико–математических наук,  
профессор Телегин Г.Г.

Чебоксары 2003

## **Введение**

Актуальность работы. Исследованию переходных процессов в нелинейных динамических системах подверженных случайным воздействиям уделяется значительное внимание. Особенно интенсивно идеи стохастической динамики нелинейных систем развиваются в статистической радиофизике и оптике – области, наиболее удобной для проведения экспериментальных и теоретических работ, где классическими объектами исследований являются автогенераторы электромагнитных колебаний радио- и оптического диапазонов.

Основополагающей работой в направлении статистического описания динамических систем явилась работа Л. Понтрягина, А. Андронова, А.Витта, 1933г. Изучение флуктуаций переходных процессов в автоколебательных системах началось с работ С.А. Ахманова, 1960г, 1981г; флуктуационные явления в стационарном режиме работы подробно рассмотрены в классической работе А.Н. Малахова, 1968г. и во многих более поздних известных работах.

К настоящему времени теоретические исследования стохастической динамики автоколебательных систем с квадратичной и кубической нелинейностью для интенсивности колебаний проведены приближенно аналитическими методами на основе стохастических дифференциальных уравнений ланжевеновского типа (СДУ) (Е.В. Бакланов, С.Г. Раутиан, 1969) и на основе уравнений Фоккера-Планка (УФП) для плотности распределения случайной величины (ПРВ) (Г.Г. Телегин, 1971-1997гг.). Решение проводилось следующим образом: в начальный период развития генерации учитывались шумы, но не учитывалась нелинейность, а в режиме развитой генерации учитывалась нелинейность, но пренебрегали влиянием шума на систему, окончательный результат получался в виде “сшивки” двух решений. Такой подход позволил объяснить общую картину стохастических процессов в системах со слабой нелинейностью и постоянными управляющими параметрами, но не позволил выявить особенности стохастической динамики, которые воспроизводимы при численном эксперименте.

Идеи численного исследования стохастических процессов в нелинейных динамических системах на основе СДУ и УФП развиты во многих известных работах (К.Дж. Мерклингер, 1963г.; Н. Risken, 1984г.; Ю.Л. Климонтович, 1989г.; В.А. Кабанов, 1996г.; А.И. Ноаров, 1999г.; О.В. Коломиец, 1999г., и др.). Обзор работ показал, что в большинстве случаев исследования проводятся на моделях со слабой нелинейностью для переходных процессов установления стационарного режима и стационарных режимов работы системы. В имеющейся научной литературе не было замечено работ по исследованию стохастических динамических процессов затухания генерации при резком и медленном изменении управляющего параметра.

Таким образом, численные исследования стохастической динамики автоколебательных систем с различными нелинейными характеристиками, постоянными и зависящими от времени управляющими параметрами на основе СДУ и УФП представляют актуальную задачу.

Необходимо отметить, что на основе исследований стохастических процессов в лазерах было сформулировано междисциплинарное научное направление – Синергетика (Г. Хакен, 1980г.), в направлении которого находятся исследования и в данной работе.

Цель работы: исследование нестационарных стохастических процессов в автоколебательных системах.

Поставленная цель достигается решением следующих задач:

1. Численный анализ переходных процессов установления стационарных режимов и срыва генерации на основе СДУ и УФП в системе с квадратичной, кубической, симметричной и несимметричной нелинейностью:

- а) в мягком режиме возбуждения;
- б) в жестком режиме возбуждения.

2. Численное исследование динамической бифуркации в автоколебательных системах при установлении квазистационарного режима и срыва генерации на основе СДУ и УФП:

- а) при прямом и обратном медленном переходах через пороговое значение управляющего параметра в системе с квадратичной нелинейностью;

б) при прямом и обратном медленном переходе через пороговое значение управляющего параметра в системе с кубичной нелинейностью.

Методы исследований. Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, СДУ и УФП в среде пакета *Maple V Release 6* использовались методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, матричные методы, конечно-разностные методы решения уравнений математической физики и методы численного интегрирования.

### **Содержание работы**

В работе рассматривается современное состояние теоретических и экспериментальных исследований в области стохастической динамики нелинейных и в частности автоколебательных систем.

Анализируя экспериментальные и теоретические работы отечественных и зарубежных ученых в области статистической радиофизики и оптики можно отметить, что в последнее время проявляется большой интерес исследованию как стационарных, так и нестационарных режимов работы автоколебательных систем с аддитивным шумом. Однако на наш взгляд остались неисследованными задачи нестационарных стохастических процессов в автоколебательных системах с различными повышенными нелинейными характеристиками.

На основе таких исследований в работе показывается связь между автоколебательными и другими динамическими системами. В качестве динамических систем, подверженных случайным воздействиям, при этом рассматриваются электронные системы и полупроводниковые приборы с лавинным размножением электронов, химические, социологические и экономические системы на основе одинаковых динамических уравнений.

Для автоколебательной системы с одной степенью свободы СДУ ланжевеновского типа имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + D + \xi(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  -интенсивность колебаний;  $A(x)$  -детерминированная составляющая;  $D$  -интенсивность аддитивного шума;  $\xi(t)$  -случайный гауссовский процесс,  $t$  -время. Случайные воздействия и внутренние стохастические явления служат толчком для инициирования выхода автоколебательной системы из неустойчивого состояния равновесия и поиска нового состояния равновесия. При некоторых упрощающих предположениях на свойства (характер) случайных возмущений

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$$

эквивалентным уравнением уравнению (1) является УФП для плотности распределения вероятности, которое в нашем случае имеет вид:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{A(x)P(x, t)\} + D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \right\} \quad (2)$$

Точных аналитических методов решения нестационарных уравнений (1) и (2) с нелинейными коэффициентами и зависящими от времени управляющими параметрами не существует. На практике применяют различные приближенные методы решения этих уравнений, которые не всегда позволяют наблюдать полную картину стохастических процессов, происходящих в указанных системах. Показано, что численным исследованием можно решить поставленную задачу наиболее полно и выявить особенности, которые экспериментально и теоретически не были анализированы до настоящего времени.

Приведены основные математические модели автоколебательных систем, в которых в качестве переменной состояния системы рассматривается интенсивность (энергия) колебаний:

модели с симметричной и несимметричной квадратичной характеристикой:

$$A(x) = \alpha x - \beta x^2; \quad (3)$$

$$A(x) = \pm \alpha x \mp \beta_1 \sqrt{x} - \beta_2 x^2; \quad (4)$$

модели с симметричной и несимметричной кубичной характеристикой:

$$A(x) = \pm \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3; \quad (5)$$

$$A(x) = \pm \alpha x + \beta_1 x \sqrt{x} - \beta_2 x^2 + \gamma_1 x^2 \sqrt{x} - \gamma_2 x^3, \quad (6)$$

где  $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$  - параметры системы.

В радиофизических системах эти уравнения известны как уравнения установления стационарного режима автоколебаний. В полупроводниках с лавинным размножением электронов эти уравнения описывают генерационно-рекомбинационные процессы. В биологических и социологических системах - процессы “рождения и гибели”. Процессы пробоя в газоразрядных приборах. В химической кинетике автокаталитические реакции.

Подробно рассмотрена совокупность явлений - называемая стохастической динамической бифуркацией. Эти явления происходят в системах с параметрами, когда параметры медленно изменяются во времени и проходят через бифуркационное значение. Приведены теоретические и экспериментальные работы по исследованию динамической бифуркации (Шишкова, 1973г, 1980г.; Телегин Г.Г. 1972г, 1997г; Р. Mandel; А.В. Половинкин, 1998г. и др.).

Модельные уравнения (3-6) при прямом и обратном медленном переходе управляющего параметра  $\alpha$  через пороговое значение преобразуются с  $\alpha(t) = \pm vt \mp \alpha_0$ , где  $v$  - скорость изменения  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  - параметр в момент начала наблюдений  $t = 0$ .

Численно исследуются переходные процессы установления стационарного режима и затухания генерации автоколебательных систем в мягком режиме возбуждения.

Методика исследований следующая: Анализ переходных процессов установления стационарного режима. Анализ переходных процессов срыва генерации. Для описания неравновесных процессов используются уравнения: динамические (детерминированные) – нулевое приближение по флуктуациям; детерминированные уравнения с флуктуирующими начальными условиями; СДУ (со случайным источником, определяемым мелкомасштабными флуктуациями); уравнения Фоккера-Планка для ПРВ.

Из детерминированной части  $A(x)$  динамического уравнения получается выражение эффективного коэффициента управления:  $S(x) = A(x)/x$ , по которой определяется тот или иной режим возбуждения колебаний. Для моделей (3-5) графики  $S(x)$  при различных значениях  $\alpha$  приведены на рис. 1. Значение  $\alpha = 0$  является порогом самовозбуждения колебаний, который существенно определяет вид кривых на рис. 1. Поэтому коэффициент  $\alpha$  естественно выбирать в качестве наиболее существенного управляющего параметра системы. Пусть параметр  $\alpha$  резко меняется вблизи порогового значения от  $\alpha > 0$  до  $\alpha < 0$  и наоборот так, что система последовательно переходит позиции от кривой 1 до кривой 6 и обратно. Считается, что успевает устанавливаться стационарный режим. Кривые 1,2,3 определяют мягкий режим возбуждения колебаний. Кривая 1 соответствует случаю  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma = 0$  или  $\alpha > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 = 0$ . Причем  $\alpha/\beta = x_{ст}$  показывает стационарный режим. Кривая 2 соответствует случаю  $\alpha > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 < 0$  или  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma < 0$ . Корни уравнения  $S(x)$  определяются как:

$$x_{1,2} = \left( -(-2\alpha\beta_2 - \beta_1^2) \mp \sqrt{(-2\alpha\beta_2 - \beta_1^2)^2 - 4\beta_2\alpha^2} \right) / 2\beta_2 \quad \text{или}$$

$$x_{1,2} = \left( \beta \mp \sqrt{\beta^2 + 4\gamma\alpha} \right) / 2\gamma.$$

Первый корень  $x_1$  отрицательный, а второй корень  $x_2$  положительный. Кривая 3 соответствует случаю  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma < 0$  или  $\alpha = 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 < 0$  корни:  $x_1 = 0$  и  $x_2 > 0$ . Точка  $x = 0$  неустойчива,

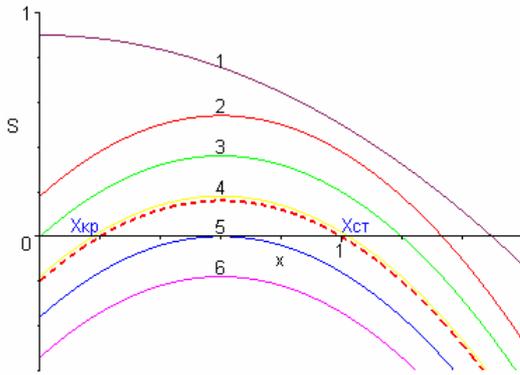


Рис. 1. Кривые для  $S(x)$  при разных значениях  $\alpha$  для моделей (3-5)

поэтому любые сколь угодно малые начальные флуктуации переменной состояния  $x$  приводят к переходу в устойчивое состояние, определяемое вторым корнем  $x_2 = x_{ст}$ . Обсуждение по кривым 4-6 проводится далее.

Отметим, что для модели (4) кривые  $S(x)$  имеют несимметричный вид.

Детерминированная составляющая уравнения (1) играет роль силы, пропорциональной производной потенциального поля:  $u(x) = -\int A(x)dx$ . Это уравнение используется для описания бифуркационных процессов при изменении управляющего параметра  $\alpha$ . Графики  $u(x)$  для моделей (3-5) приведены на рис. 2. (нумерация графиков такая же, что и на рис. 1), а для модели (6) на рис (3).

На рис. 3 показаны потенциальные кривые только для мягкого режимов (с одной "глубокой" потенциальной ямой) и жесткого (с тремя потенциальными ямами).

Численное решение уравнения (1) с учетом (3-6) в мягком режиме возбуждения имеет вид, представленный на рис. 4. Видны флуктуации времени установления стационарного значения  $x_{ст}$ . Однако при срыве генерации флуктуации не наблюдаются. Для получения статистических характеристик для нестационарного случайного процесса решается уравнение (2) в виде

$$-P_{i,j-1} - (A2)_{i,j} P_{i+1,j-1} - (B2)_{i,j} P_{i,j} - (C2)_{i,j} P_{i-1,j} = (A1)_{i,j} P_{i+1,j} - (B1)_{i,j} P_{i,j} + (C1)_{i,j} P_{i-1,j},$$

следующими начальными распределениями  $P(x,t) = (1/\bar{x}) \exp\{-x/\bar{x}\}$  и

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2D^2}\right\} \quad \text{при} \quad t=0; \quad A1, A2, B1, B2, C1, C2 \quad -$$

коэффициенты разностного схемы уравнения (2).

Начальное распределение в виде экспоненциального получается из стационарного решения (2) при  $\alpha \ll 0$ , когда система находится “глубоко” под порогом.

Численное решение нестационарного уравнения (2) представлено на рис. 5, что справедливо для всех приведенных моделей при “больших” значениях  $\alpha$ .

Обнаружено качественно новое явление, заключающееся в том, что для моделей (4,5) при положительных значениях  $\alpha$ , близких к пороговому

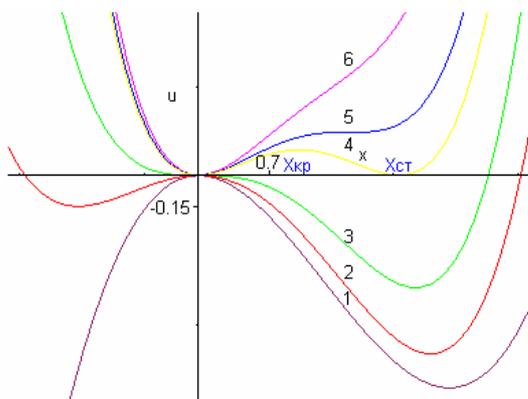


Рис. 2. Кривые  $u(x)$  для моделей (3-5).

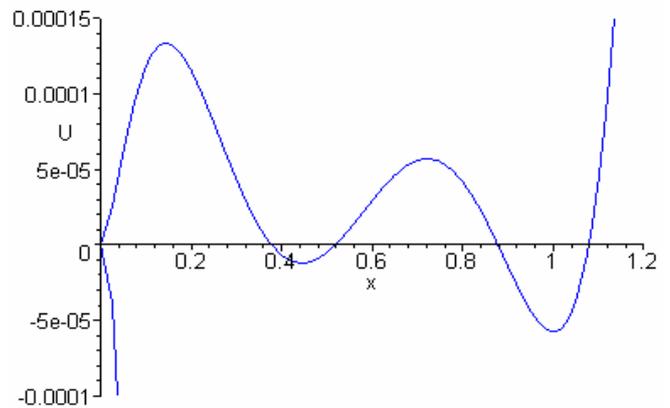


Рис. 3. Кривые  $u(x)$  для модели (6).

значению характер эволюции ПРВ имеет бимодальный вид, а для модели (6) наблюдается тримодальный вид ПРВ (качественный вид которых аналогичен

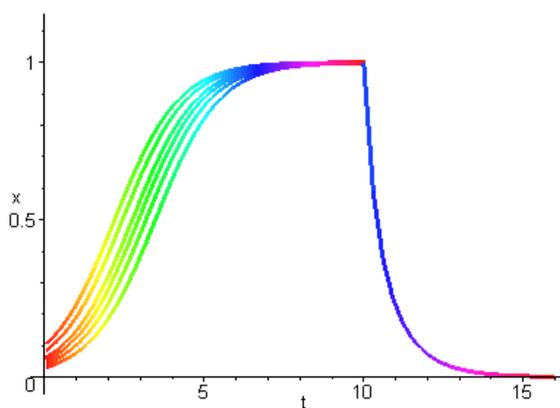


Рис. 4. Графики нарастания и затухания  $x$  в мягком режиме возбуждения.

графикам, показанным далее). На основе полученных результатов показаны условия возникновения бимодальности в эволюции ПРВ с потенциальной функцией  $V$  вида при наличии только “одного” характерного времени системы  $\tau \sim 1/\alpha$ .

Предложен метод статистического анализа динамики импульсных процессов, основанный на определении относительной степени упорядоченности системы на основе относительных флуктуаций переменной состояния системы и времени переходных процессов.

Используя якобиан перехода  $Q(t, x) = \left| \frac{dx}{dt} \right| P(x, t)$  численно определяется

ПРВ времени на выбранном значении переменной состояния  $x$ . Пользуясь полученными распределениями  $P(x, t)$  и  $Q(t, x)$  можно рассчитать поведение

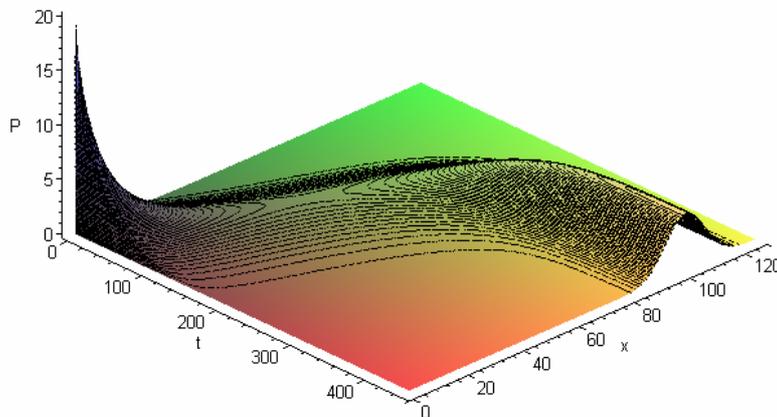


Рис. 5. График  $P(x, t)$  с экспоненциальным начальным распределением для моделей (3-6) при “больших”  $\alpha$ .

нестационарных средних, дисперсий и относительных флуктуаций переменной состояния  $x$  и времени  $t$ :

$$\bar{x}(t) = \int_0^{\infty} x P(x, t) dx,$$

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^{\infty} (x - \bar{x})^2 P(x, t) dx,$$

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t Q(t, x) dt, \quad \sigma_t^2(x) = \int_0^{\infty} (t - \bar{t})^2 Q(t, x) dt,$$

$$F_t = \frac{\sigma(t)}{x(t)}, \quad F_x = \frac{\sigma(x)}{t}.$$

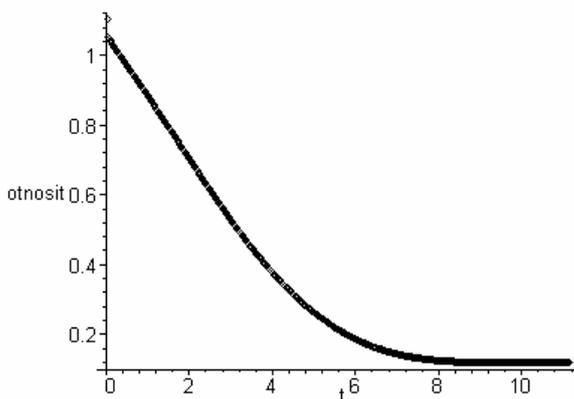


Рис. 6. График  $F(t)$  в переходном режиме установления стационарного режима.

на рис 5. На рис. 6 наблюдается уменьшение относительных флуктуаций  $x$  в момент выхода на стационарный уровень.

На рис. 6,7 приведены графики относительных флуктуаций переменной состояния и времени для переходного процесса установления стационарного режима, показанного

По рис. 7 видно, что относительные флуктуации времени имеют минимум на уровне  $x = 0,5$ . На основе проведенного анализа предлагается выбрать величину относительных флуктуаций в системе в качестве критерия степени упорядоченности, по крайней мере, в динамике автоколебательных систем, подверженных случайным воздействиям.

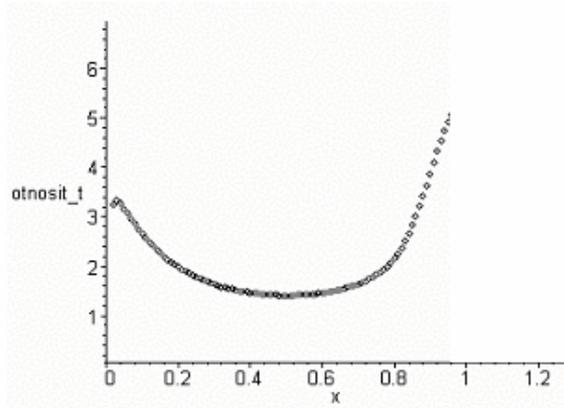


Рис. 7. График относительных флуктуаций времени.

сделанные по рис. 4., видно нарастание относительных флуктуаций переменной состояния  $x$ .

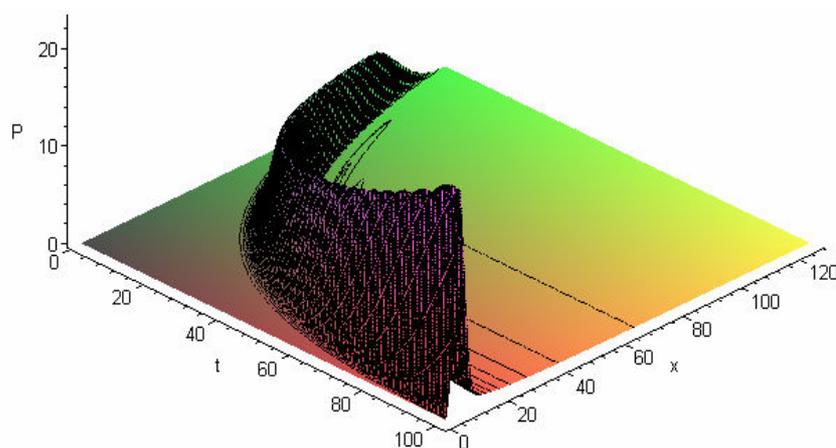


Рис. 8. График  $P(x,t)$  для срыва генерации при  $\alpha \ll 0$ .

Показано, что системы с несимметричной квадратичной и симметричной кубической характеристикой показывают качественно одинаковые результаты численных исследований. Поэтому здесь ограничимся пояснениями только на модели (5).

Кривая 4 (рис. 1) соответствует случаю  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma < 0$ ,  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ , причем второй корень соответствует устойчивому состоянию системы, как и в предыдущих случаях. Точка  $x = x_1 = x_{кр}$  является критической. В области этой точки система неустойчивая. Сигналы со значением  $x < x_{кр}$  затухают, а сигналы с  $x > x_{кр}$  нарастают и система

Проведены численные исследования затухания генерации. При срыве генерации со значением  $\alpha$ , находящимся “глубоко” под порогом решение уравнения (2) для моделей (3-6) приведено на рис. 8. Начальное распределение при этом задается в виде стационарного решения (2). Подтверждаются выводы по отсутствию флуктуаций,

Изучены переходные процессы установления стационарного режима и срыва генерации в жестком режиме возбуждения.

Рассматриваются модели (4-6).

переходит в устойчивое состояние с  $x = x_2 = x_{ст}$ . Кривая 5 соответствует случаю  $\beta^2 - 4\gamma\alpha = 0$ , корни уравнения (5) равны:  $x_1 = x_2$  критическая и устойчивая точки совпадают  $x_{кр} = x_{ст}$ . Кривая 6 соответствует случаю, когда уравнение не имеет корней, автоколебания в системе отсутствуют.

Графики (рис.1, 2) показывают, что в зависимости переменной состояния  $x$  от управляющего параметра  $\alpha$  в системе возможен режим гистерезисного зажигания и срыва генерации. Качественная зависимость  $x$  от  $\alpha$  в области гистерезиса приведена на бифуркационной диаграмме

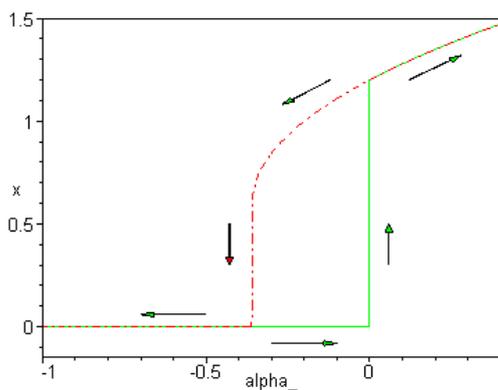


Рис. 9. Зависимость  $x$  от  $\alpha$

(рис. 9). При уменьшении  $|\alpha|$  в области отрицательных значений в момент достижения порога  $\alpha = 0$  происходит самовозбуждение колебаний и резкий скачок интенсивности колебаний до  $x = x_{ст}$ , а также наблюдается увеличение значения  $x$  вслед за увеличением  $\alpha$  в квазистационарном режиме. При

изменении  $\alpha$  в обратном направлении в сторону отрицательных значений колебания продолжают даже при  $\alpha < 0$ . Однако, при значениях  $|\alpha|$ , когда  $x_1 = x_2 \sim 0.5x_{ст}$  происходит резкий срыв колебаний.

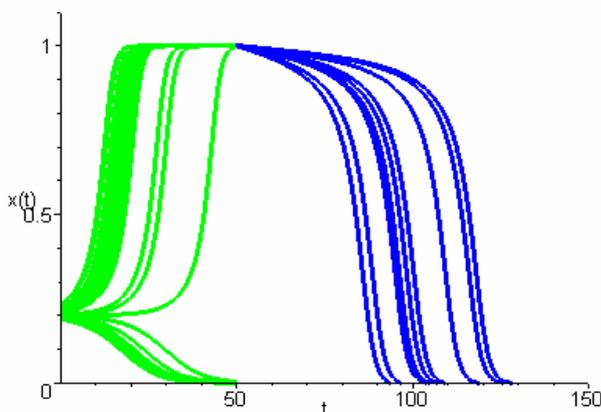


Рис.10. Графики нарастания и затухания  $x$  в жестком режиме возбуждения.

При переходе к статистическому рассмотрению динамики автоколебательной системы наблюдается следующее: в режиме жесткого возбуждения на рис. 10 видны флуктуации времени как установления стационарного состояния, так и срыва генерации. Наблюдается затухание сигналов со

значением  $x_0 < x_{кр}$  и нарастание сигналов с  $x_0 > x_{кр}$  и переход системы в стационарное состояние с  $x = x_2 = x_{ст}$ .

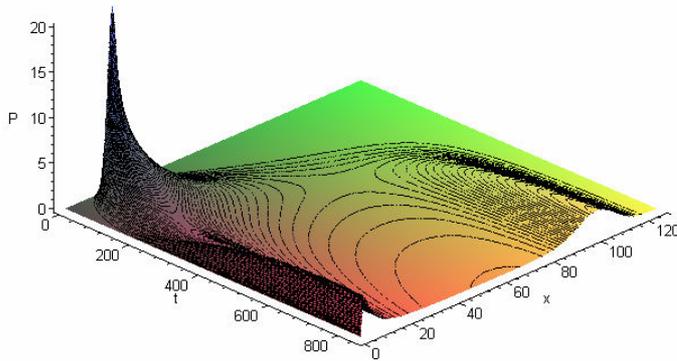


Рис. 11. Вид ПРВ для жесткого режима моделей (4,5) с гауссовым начальным распределением.

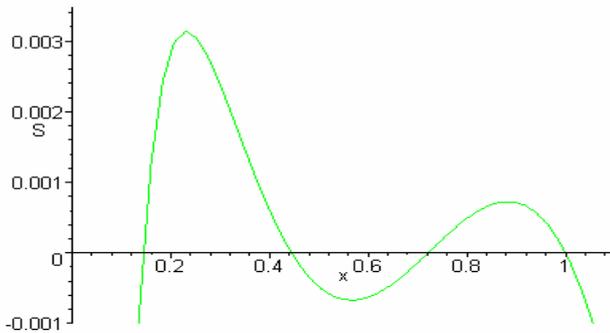


Рис. 12. Характеристика  $S(x)$  для модели (6) при  $\alpha < 0$ .

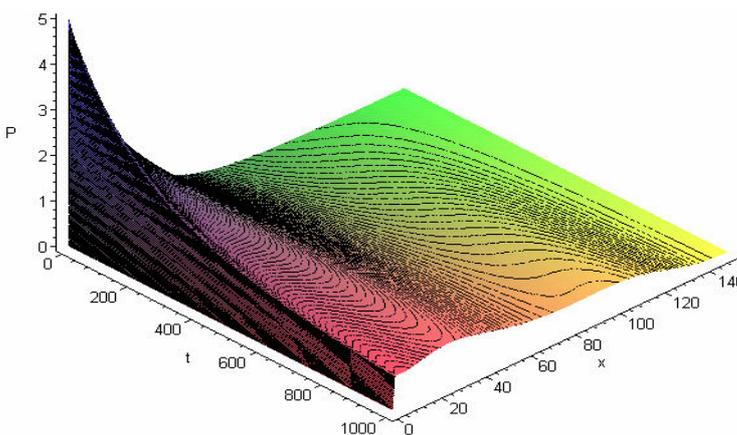


Рис. 13. Эволюция ПРВ для модели (6) при  $\alpha < 0$ .

соответствуют максимумам ПРВ, что показано на рис.13 на основе численного решения (2) с учетом (6).

Варьирование параметра  $\alpha$  в пределах от  $\alpha > 0$  до  $\alpha < 0$  позволяет рассмотреть картину раздвоения плотности распределения вероятности в случае жесткого режима возбуждения. На рис. 11 видна область бифуркационного ветвления. Исследования позволили обнаружить следующее: чем ближе наиболее вероятное значение  $P(x,0)$  к точке  $x_{кр}$  ( $x_0 \sim x_{кр}$ ), тем сильнее проявляется область бифуркационного ветвления.

Для модели (6) наиболее существенный вид кривой  $S(x)$  в жестком режиме возбуждения имеет вид, приведенный на рис. 12., где показана возможность появления двухэтапной петли гистерезиса. На рис. 4 был приведен график потенциальной функции модели (6). Минимумы  $u(x)$

Проведены исследования переходных процессов затухания генерации при переключении  $\alpha$  от  $\alpha > 0$  до  $\alpha < 0$ , т.е. переход от кривых 1,2,3 (рис. , 2) к кривым 5-6.

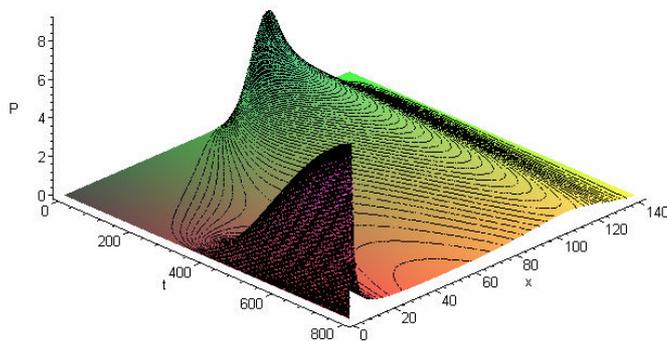


Рис. 14. ПРВ затухания генерации для моделей (4,5) при переходе  $\alpha$  от  $\alpha > 0$  до  $\alpha < 0$ .

На рис. 14 приведено численное решение уравнения (2) с учетом (4,5) при срыве генерации. Здесь также обнаружено раздвоение плотности распределения вероятности.

Полученные результаты позволили объяснить следующее, автоколебательная система при статистическом рассмотрении является метастабильной системой не только в жестком, но и в мягком режиме возбуждения, соответствующего фазовым переходам I и II рода.

Проведем анализ стохастической динамической бифуркации моделей автоколебательных систем, а именно моделей (3-5).

Выше рассматривались статистические явления в динамике системы при резком переключении управляющего параметра генерации. Условие быстрого включения в любой динамической системе зависит от свойств самой системы, в частности от превышения усиления над потерями.

Порог самовозбуждения колебаний оказывается особой точкой в отношении флуктуаций динамической переменной: ниже порога имеется стационарный гауссовский шум, а в надпороговой области процесс становится существенно негауссовским. Переход между этими статистиками при медленном изменении управляющего параметра вблизи порога приводит к сильным флуктуациям динамической переменной вблизи точки бифуркации.

В момент перехода через порог  $\alpha=0$  инерционность системы оказывается настолько большой, что динамическая переменная не успевает следовать за изменением  $\alpha(t)$  квазистационарно как бы медленно оно ни

происходило. При дальнейшем увеличении  $\alpha(t)$  инерционность системы уменьшается и колебания начинают следовать за изменением  $\alpha(t)$  квазистационарно. Таким образом, вблизи порогового значения управляющего параметра происходит запаздывание динамической переменной от статической.

Рассмотрены случаи изменения  $\alpha$  по линейному закону  $\alpha(t) = vt - \alpha(0)$  и  $\alpha(t) = -vt + \alpha(0)$ ,  $\alpha(0)$ - его значение в момент времени  $t=0$ .

При изменении  $t$  параметр  $\alpha$  обращается в нуль в момент  $t = \alpha_1 / v$ . Следовательно, в этот момент собственное время системы (время установления колебаний)  $\bar{t} \rightarrow \infty$ . Таким образом, вблизи порога при любом сколь угодно медленном сканировании  $\alpha$  в системе происходит переходной процесс в обычном смысле, то есть генерация “не успевает следовать” за изменением внешнего возмущения. При малых временах параметр генерации нарастает и проходит через нулевое значение.

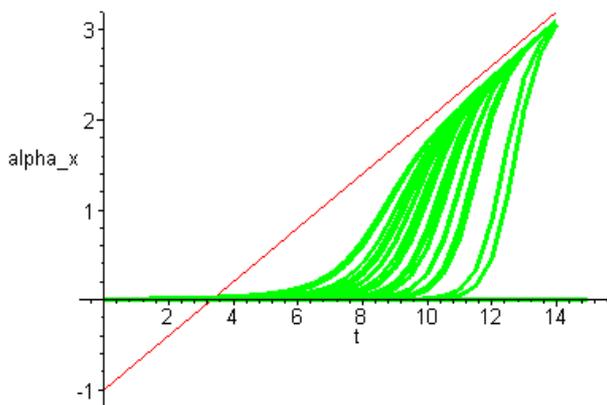


Рис. 15. Медленное изменение  $\alpha$  для модели (3).

Этот момент времени приблизительно определяется пересечением касательной к кривой квазистационарной генерации с осью времени. В силу большой инерционности системы при малых  $\alpha$ , нарастание генерации происходит медленнее, чем рост параметра генерации и зависимость  $x$  от  $\alpha$  отличается от прямой. При этом

хорошо видны флуктуации времени возникновения генерации, обусловленные шумом, имеющимся в системе вблизи порога (рис. 15).

При условии  $(vt - \alpha_0) \gg \beta x$  показано, что линейный период развития генерации происходит за время  $t_0 \geq \frac{2}{x_0 \beta}$ . Это время приблизительно равно

среднему времени нарастания при наличии флуктуаций и определяет область, в которой происходит переходный процесс.

Для получения статистической информации для существенно нестационарного случайного процесса численно решается УФП вида

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (-\alpha_0 + vt)x - \beta x^2 \right\} P(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \right\}.$$

Существенно другая картина от рассмотренного выше случая наблюдается при исследовании установления квазистационарного режима генерации в системе с моделями (4,5). Прохождение через порог в этом случае описывается одним из уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = \left[ (vt - \alpha_0) + \beta x - \gamma x^2 \right] x + D + \xi(t).$$

Это уравнение описывает стохастическую динамическую бифуркацию в автоколебательной системе вблизи жесткого режима возбуждения (рис. 16).

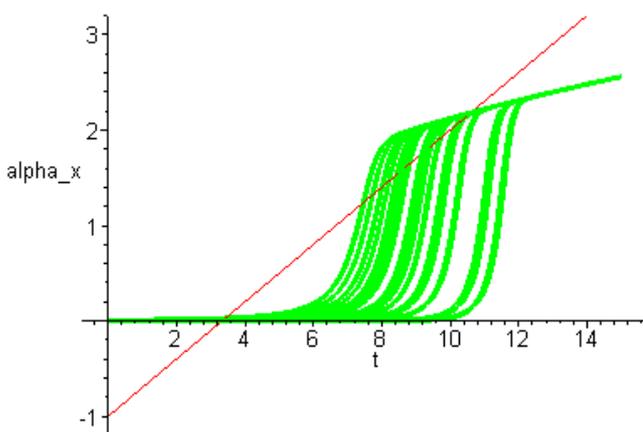


Рис. 16. Динамическая бифуркация для модели (5) с учетом  $\xi(t)$ .

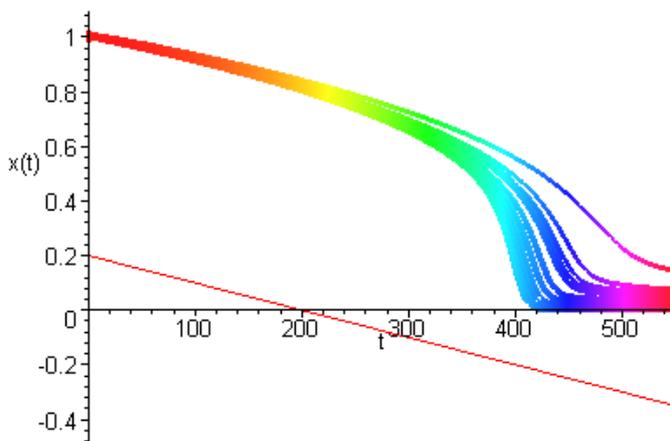


Рис. 17. Флуктуации времени срыва при обратном медленном переходе через порог.

Существенно иная картина от системы с квадратичной нелинейностью наблюдается и при обратном сканировании управляющего параметра. Этот процесс описывается уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \left[ (-vt + \alpha_0) + \beta x - \gamma x^2 \right] x + D + \xi(t).$$

Его решение приведено на рис. 17.

Видны флуктуации времени срыва генерации. Это было

обнаружено и в некоторых экспериментальных работах. Для получения статистической информации для существенно нестационарного случайного процесса перейдем к анализу на основе УФП:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (-\alpha_0 + vt)x + \beta x^2 - \gamma x^3 \right\} P(x,t) + D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} P(x,t) \right\}.$$

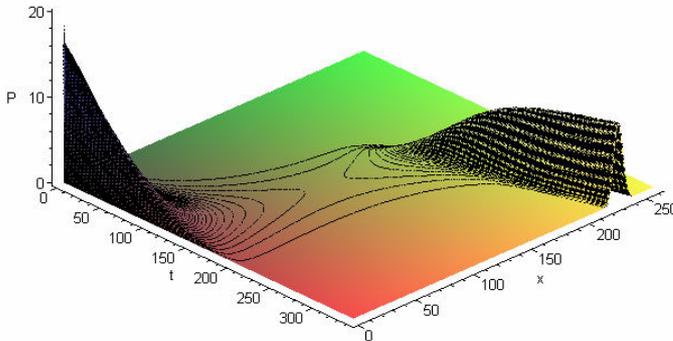


Рис. 18. График решения УФП для системы с кубической нелинейностью модели (5) при прямом медленном изменении управляющего параметра  $\alpha(t) = -\alpha_0 + vt$ .

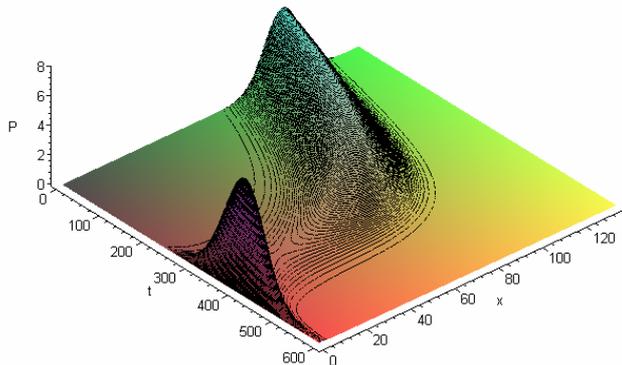


Рис. 19. График решения УФП для системы с кубической нелинейностью модели (5) при обратном медленном изменении управляющего параметра  $\alpha(t) = \alpha_0 - vt$ .

Стохастическое поведение динамической автоколебательной системы соответствует тому, что на бифуркационной диаграмме  $x(\alpha)$

Его решение с начальной функцией распределения  $P(x,0) = (1/\bar{x}) \exp(-x/\bar{x})$  приведен на рис. 18. На рис. 19 показано решение УФП модели (5) при обратном медленном сканировании управляющего параметра с начальным распределением, полученным от стационарного решения уравнения (2). Область бимодальности  $P(x,t)$  соответствует области флуктуаций и запаздыванию динамической бифуркации от статической.

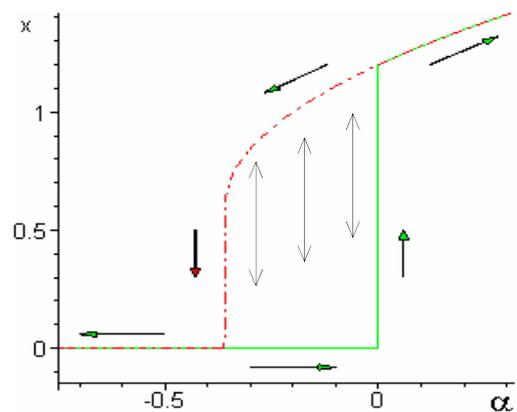


Рис. 20. Метастабильные состояния системы.

переходы между нижним и верхним кривыми могут происходить при любых значениях управляющего параметра в области гистерезиса (рис. 20), т.е. система находится в суперпозиции двух состояний.

## **Заключение**

1. Предложен метод статистического анализа динамики импульсных процессов. Указано, что в качестве критерия относительных флуктуаций переменной состояния системы и времени установления и срыва генерации необходимо оперировать относительными флуктуациями переменной состояния системы и времени.

2. Выявлена бимодальность эволюции плотности вероятности в автоколебательной системе с несимметричной квадратичной и с симметричной кубичной нелинейностью в мягком режиме возбуждения при быстром изменении управляющего параметра вблизи порогового значения. На основе полученных результатов показаны условия возникновения бимодальности в эволюции ПРВ.

3. Выявлена бимодальность в эволюции плотности вероятности в автоколебательной системе с жестким возбуждением с несимметричной квадратичной и с симметричной кубичной нелинейностью как при установлении стационарного режима, так и при срыве генерации в случае быстрого изменения управляющего параметра.

4. Обнаружено тримодальное поведение эволюции плотности вероятности в автоколебательной системе с несимметричной кубичной нелинейностью как в мягком, так и в жестком режиме возбуждения.

5. Показано, что автоколебательная система с несимметричной квадратичной и с симметричной и несимметричной кубичной нелинейностью как в жестком так и в мягком режиме возбуждения при учете стохастических процессов является метастабильной системой.

6. Впервые решена задача стохастической динамической бифуркации в системах с кубичной нелинейностью как для установления квазистационарного режима, так и для случая медленного срыва генерации.

7. Обнаружено бимодальное поведение плотности вероятности в режиме динамической бифуркации установления и срыва генерации в автоколебательной системе с симметричной кубичной нелинейностью. Показана гистерезисная зависимость переменной состояния системы от

управляющего параметра. Выявлено, что переходы между нижним и верхним кривыми петли гистерезиса могут происходить при любых значениях управляющего параметра в области гистерезиса.

### **Список публикаций по теме работы.**

1. Г.Г. Телегин, В.Г. Медведев. Статистический анализ переходных процессов в электронных системах // Вестник Чувашского университета, Чебоксары, 1996, №2, С.100-103.

2. Г.Г. Телегин, В.Г. Медведев. Статистическая модель нестационарных процессов в нелинейных нейронных системах // Материалы III Международной научной конференции “Математические модели нелинейных возбуждений, процессов, динамики, управления в конденсированных системах и других средах”, Тверь, Изд-во ТГТУ, 1998, С.91.

3. Г.Г. Телегин, В.Г. Медведев. Динамика нелинейных систем в области бифуркаций // Материалы III Всерос. науч.- техн. конф. Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем. Чебоксары: Изд. Чуваш. ун-та. 1999г. С.7-9.

4. Г.Г. Телегин, В.Г. Медведев. Численное исследование динамики носителей заряда в полупроводниках при ударной ионизации // Материалы III всероссийской научно-техн. конф. Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике. Чебоксары. Изд. Чув. ун-та. 2000г.

5. В.Г. Медведев. Статистический анализ динамики нелинейных систем с кубичной нелинейной характеристикой // Материалы XXXV научной студенческой конференции по гуманитарным, естественным и техническим наукам ЧувГУ. Чебоксары. Изд. Чуваш. ун-та. 2001г. С.163-169.

6. В.Г. Медведев. Статистический анализ динамической бифуркации автоколебательной системы вблизи жесткого режима возбуждения // Материалы IV Всерос. науч.- техн. конф. Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем. Чебоксары: Изд. Чуваш. ун-та. 2001г.

7. В.Г. Медведев. Статистическая динамика автоколебательной системы при наличии аддитивного и малого мультипликативного шума // Тезисы докладов Поволжской научно-практической конференции "Электротехника и электроника Поволжья на рубеже тысячелетий". Чебоксары. Изд. Чуваш. ун-та. 2001г. С.102-103.

8. В.Г. Медведев. Метод статистического анализа динамики импульсных процессов // III Всероссийская научно-практическая конференция "Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем". Ульяновск. Изд. УлГТУ. 2001г. С.94-96.

9. В.Г. Медведев. Стохастическая динамика автоколебательной системы с несимметричной характеристикой нелинейного элемента // IV школа-семинар "Актуальные проблемы физической и функциональной электроники". Ульяновск. Изд. УлГТУ. УО ИРЭ РАН. 2001г. С.34.

10. Стохастическая динамика автоколебательных систем с несимметричной кубичной характеристикой // Труды (шестой) научной конференции по радиоп физике, посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Греховой. Под. ред. А.В. Якимов.-Н.Новгород: ННГУ. 2002. С.124-126.

11. Исследование стохастической динамики нелинейных систем на основе логистической модели типа Мальтуса-Ферхюльста. // Труды пятого всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем-02". Красноярск. ИВМ СО РАН. 2002.